METODE BARU UNTUK MENGHITUNG DETERMINAN DARI MATRIKS $n \times n$

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

oleh:

<u>YESPI ENDRI</u>
10854004331

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

METODE BARU UNTUK MENGHITUNG DETERMINAN DARI MATRIKS $n \times n$

YESPI ENDRI
10854004331

Tanggal Sidang : 31 Oktober 2013
Periode Wisuda : Februari 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Banyak cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan dari suatu matriks, diantaranya aturan segitiga, aturan sarrus, metode minor kofaktor, reduksi baris, metode kondensasi chio, dan metode kondensasi dodgson. Tugas akhir ini membahas tentang metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n$. Ada 2 metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n$. Metode pertama adalah menghitung determinan matriks $n \times n (n \geq 5)$ dengan mereduksi ordo menjadi $(n-4) \times (n-4)$ dimana entri dari baris ke-2 dan baris $n-1$ serta kolom ke-2 dan kolom $n-1$ adalah nol, kecuali entri pertama dan terakhirnya. Metode pertama dihitung dengan rumus : $|C_{n\times n}|=(a_{12}a_{21}a_{n,n-1}a_{n-1,n}-a_{12}a_{2n}a_{n,n-1}a_{n-1,1}-a_{21}a_{n2}a_{1,n-1}a_{n-1,n}+a_{1,n-1}a_{2n}a_{n2}a_{n-1,1})\ C_{(n-4)\times(n-4)}$. Metode kedua adalah menghitung determinan matriks $n \times n (n \geq 3)$ dengan mereduksi determinan menjadi ordo 2. Metode kedua ini dihitung dengan rumus : $\det(A)= \frac{1}{|B|} \begin{matrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{matrix}$, dengan syarat $|B|$ tidak nol. Matriks B adalah matriks berukuran $(n-2) \times (n-2)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom pertama serta baris terakhir kolom terakhir. Sedangkan C, D, E, F adalah matriks berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris terakhir kolom terakhir, baris terakhir kolom pertama, baris pertama kolom terakhir dan baris pertama kolom pertama.

Katakunci : Determinan, Matriks, dan Ordo.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"METODE BARU UNTUK MENGHITUNG DETERMINAN DARI MATRIKS $n \times n$"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studiStrata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si selaku pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Ibu Rahmadeni, M.Si selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Abangku (Hendri) yang tak lelah memberi bantuan, motivasi dan semangat serta doa yang tak terbalas.
9. Sayangku (Rafi Zatria) yang tak lelah memberi masukan dan motivasi dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
10. Sahabat-sahabatku (Eka Wahyudiningsih, Netti Herawati, Delni Yurdaningsih, Rahmawati, Rimi Herlis, Titin Kurniatin, Alfinadilla chaniago, Andri Fikos, Ise Putra, dan Eko Mulyanto) yang selalu memberi *support*..
11. Teman-teman jurusan Matematika Angkatan 2008 serta adik tingkat jurusan Matematika angkatan pertama sampai terakhir, serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.
12. Adek-adekku sekos (Yosi Novelia dan Risma Fitriani) yang telah memberi arahan dan masukan dalam peyelesaian tugas akhir ini.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 31 Oktober2013

Yespi Endri

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN..	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL...................	iv
LEMBAR PERNYATAAN..	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT..	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI..	xi
DAFTAR SIMBOL...	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah...	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-3
1.3 Batasan Masalah	I-3
1.4 Tujuan dan Manfaat Penulisan....................................	I-3
1.5 Sistematika Penulisan	I-4
BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Matriks	II-1
2.2 Jenis-Jenis Matriks..	II-1
2.3 Operasi Matriks..	II-5
2.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Dua Buah Matriks	II-5
2.3.2 Perkalian Matriks dengan Bilangan Real(Skalar)	II-6
2.3.3 Perkalian Dua Buah Matriks	II-6
2.4 Determinan Matriks	II-7
2.5 Menghitung Determinan	II-13
2.5.1 Aturan Sarrus..	II-13

2.5.2 Aturan Segitiga II-16
2.5.3 Metode Minor Kofakaktor.................................. II-17
2.5.4 Reduksi Baris.. II-20
2.5.5 Metode Kondensasi Chio II-22
2.5.6 Metode Kondensasi Dodgson............................ II-24
2.6 Sifat-Sifat Determinan II-27
BAB III METODOLOGI PENELITIAN
3.1 Menghitung Determinan Matriks $n \times n (n \geq 5)$ dengan Mereduksi Ordo menjadi $(n - 4) \times (n - 4)$ III-1
3.2 Menghitung Determinan Matriks $n \times n (n \geq 3)$ dengan Mereduksi Determinan menjadi Ordo 2 .... III-3
BAB IV PEMBAHASAN
4.1 Menghitung Determinan Matriks $n \times n (n \geq 5)$ dengan Mereduksi Ordo menjadi $(n - 4) \times (n - 4)$.............. IV-1
4.2 Menghitung Determinan Matriks $n \times n (n \geq 3)$ dengan Mereduksi Determinan menjadi Ordo 2..................... IV-6
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN
5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran.. V-1

DAFTAR PUSTAKA
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah cabang matematika yang sudah digunakan matematikawan sejak ribuan tahun yang lalu. Perkembangan lebih lanjut dari aljabar terjadi pada abad ke-16 yaitu tentang determinan matriks. Menentukan determinan dari suatu matriks merupakan hal yang sangat penting dalam menyelesaikan masalah-masalah tentang matriks. Determinan dari suatu matriks hanya bisa ditentukan jika matriks tersebut berukuran $n \times n$ atau matriks bujur sangkar.

Teori tentang matriks pertama kali dikembangkan oleh Arthur Cayley (1821-1895) pada tahun 1857. Sedangkan ide tentang determinan muncul pertama kali di Jepang dan di Eropa pada waktu hampir bersamaan, tetapi Seki Kowa (1642-1708) mempublikasikan lebih dulu di Jepang. Tahun 1683, Seki menulis buku *Method of Solving the dissimulated problems* yang memuat metode matriks. Tanpa menggunakan istilah apa pun untuk "*determinant*", ia memperkenalkan determinan dan memberikan metode umum untuk menghitungnya.

Istilah "*determinant*" pertama kali digunakan oleh Carl F. Gauss (1777-1855) dalam *Disquisitiones arithmeticae* (1801), tetapi dalam pembahasan bentuk-bentuk kuadrat dengan menggunakan determinan. Pierre Frederic Sarrus (10 Maret 1798 – 20 November 1861) adalah seorang matematikawan Perancis. Dia menemukan aturan untuk memecahkan determinan dari sebuah matriks berukuran 3×3 yang dinamakan skema Sarrus, yang memberikan metode mudah untuk diingat dalam mengerjakan determinan dari sebuah matriks berukuran 3×3 .

Banyak cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan dari suatu matriks, diantaranya aturan segitiga, aturan sarrus, metode minor kofaktor, reduksi baris, metode kondensasi chio, dan metode kondensasi dodgson. Aturan segitiga hanya bisa digunakan untuk menghitung determinan matriks berukuran 3×3, aturan sarrus digunakan untuk menghitung determinan matriks berukuran 2×2 dan 3×3, sedangkan metode minor-kofaktor, reduksi baris, metode kondensasi chio dan metode kondensasi dodgson bisa digunakan untuk menentukan determinan matriks berukuran $n \times n$ $n \geq 3$.

Belakangan ini, beberapa peneliti sudah menemukan metode baru untuk menghitung determinan matriks. Diantaranya, pada tahun 2009, Dardan Hajrizaj menemukan metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran 3×3 yang ditulis dalam sebuah jurnal dengan judul " *New method to compute the determinant of a* 3×3 *matriks*", yang menyajikan skema mudah untuk menghitung determinan matriks berukuran 3×3. Tahun 2010, Qefsere Gjonbalaj dan Armend Salihu juga menemukan metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n$ $(n \geq 5)$ dengan syarat tertentu yang ditulis dalam sebuah jurnal dengan judul "*Computing the determinants by reducing the orders by four*". Sedangkan pada tahun 2012, Armend Salihu juga menemukan metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n$ $n \geq 3$ yang ditulis dalam sebuah jurnal dengan judul "*New computing to calculate determinants of* $n \times n$ $n \geq 3$ *matrix, by reducing determinans to 2nd order*".

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk mengulas kembali tentang metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n$ $n \geq 3$ yang sudah disajikan pada jurnal "*Computing the determinants by reducing the orders by four*" dan "*New computing to calculate determinants of* $n \times n$ $n \geq 3$ *matrix, by reducing determinans to 2nd order*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan determinan matriks berukuran $n \times n$ dengan menggunakan metode baru.

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Metode pertama hanya dapat digunakan untuk matriks berukuran $n \times n$ $n \geq 5$ dengan syarat entri dari baris ke-2 dan baris $n - 1$ serta kolom ke-2 dan kolom $n - 1$ adalah nol, kecuali entri pertama dan terakhirnya.
2. Metode kedua dapat digunakan untuk matriks $n \times n$ $n \geq 3$.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1. Tujuan

   Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan determinan matriks berukuran $n \times n$ menggunakan metode baru.
2. Manfaat

   Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

   a. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika terutama tentang determinan matriks.

   b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak materi tentang matriks, khususnya cara menentukan determinan matriks $n \times n$ dengan metode baru.

   c. Memberikan informasi kepada pembaca bagaimana cara menentukan determinan matriks.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan terdiri dari lima bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan teori-teori tentang matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks, determinan matriks serta metode-metode penyelesaian determinan matriks.

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan determinan matriks berukuran $n \times n$ dengan menggunakan metode baru.

Bab IV Analisis dan Pembahasan

Bab ini membahas tentang hasil yang diperoleh dari perhitungan determinan matriks berukuran $n \times n$ menggunakan metode baru.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran dari seluruh pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori ini terdiri atas beberapa teori pendukung yang akan dipergunakan dalam menentukan determinan matriks berukuran $n \times n$.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Charles G. Cullen, 1992) Matriks adalah suatu susunan bilangan yang berbentuk persegi panjang. Cara yang biasa digunakan untuk menuliskan sebuah matriks dengan *m* baris dan *n* kolom adalah

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Dengan a_{ij} adalah unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Contoh 2.1:

Berikut ini adalah beberapa contoh matriks.

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 4 \end{matrix}$$

2.2 Jenis-Jenis Matriks

Terdapat beberapa jenis matriks yaitu:

a. Matriks diagonal *(diagonal matrix*) adalah suatu matriks bujur sangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol.

Contoh 2.2:

Berikut ini adalah contoh matriks diagonal.

$$D_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Matriks skalar (*scalar matrix*) yaitu matriks diagonal dimana elemen pada diagonal utamanya bernilai sama tetapi bukan satu atau nol.

Contoh 2.3:

Berikut ini adalah contoh matriks skalar.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c. Matriks simetri (*simetric matrix*) yaitu matriks persegi yang setiap elemennya selain elemen diagonal adalah simetri terhadap diagonal utama atau $A = A^T$.

Contoh 2.3:

Berikut ini adalah contoh matriks simetri.

$$F_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad F_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

d. Matriks simetri miring (*skew-symmetric matrix*) yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal saling berlawanan.

Contoh 2.4:

Berikut ini adalah contoh matriks simetri miring.

$$G_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e. Matriks kesatuan/identitas (*unit matrix, identity matrix*) adalah matriks dimana semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu dan elemen diluar diagonal utama bernilai nol.

Contoh 2.5:

Berikut ini adalah contoh matriks identitas.

$$I_{2\times 2} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \; I_{3\times 3} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

f. Matriks segitiga atas (*upper triangular matrix,* U) adalah matriks diagoanal dimana elemen disebelah kanan (atas) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh 2.6:

Berikut ini adalah contoh matriks segitiga atas.

$$U_{2\times 2} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix}, \; U_{3\times 3} = \begin{matrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}$$

g. Matriks segitiga bawah (*lower triangular matrix*, L) adalah matriks diagonal dimana elemen sebelah kiri (bawah) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh 2.7:

Berikut ini adalah contoh matriks segitiga bawah.

$$L_{2\times 2} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}, \; L_{3\times 3} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{matrix}$$

h. Matriks *transpose* yaitu matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom atau sebaliknya. *Transpose* matriks A dilambangkan dengan A^T.

Contoh 2.8:

Berikut ini adalah contoh matriks *transpose*.

$A_{3 \times 2} = \begin{matrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{matrix}$ maka A^T nya menjadi : $A_{2 \times 3} = \begin{matrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{matrix}$

i. Matriks tridiagonal (*tridiagonal matrix*) yaitu matriks diagonal dimana elemen sebelah kiri dan kanan diagonal utamanya bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh 2.9:

Berikut ini adalah contoh matriks tridiagonal.

$A = \begin{matrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{matrix}$

j. Matriks singular (*singular matrix*) adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

Contoh 2.10:

Berikut ini adalah contoh matriks singular.

$A_{2\times 2} = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix}$, $A_{3\times 3} = \begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

k. Matriks non singular (*non singular matrix)* adalah matriks yang determinannya bernilai tidak sama dengan nol.

Contoh 2.11*:*

Berikut ini adalah contoh matriks non singular.

$A_{2\times 2} = \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{matrix}$, $A_{3\times 3} = \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}$

2.3 Operasi Matriks

2.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan Dua Buah Matriks

Definisi 2.2 (Anton. Rorres, 2004) Jika A dan B adalah matriks- matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Jika $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ memiliki ukuran yang sama maka :

$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dan $(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Contoh 2.12:

Diberikan dua buah matriks

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 8 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Tentukan $A + B$ dan $A - B$.

Penyelesaian :

$$A + B = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 8 \end{matrix} + \begin{matrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1+5 & 2+6 & 3+8 \\ 0+7 & 5+-3 & -2+9 \\ 4+6 & 7+2 & 8+1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 6 & 8 & 11 \\ 7 & 2 & 7 \\ 10 & 9 & 9 \end{matrix}$$

$$A - B = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 8 \end{matrix} - \begin{matrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1-5 & 2-6 & 3-8 \\ 0-7 & 5-(-3) & -2-9 \\ 4-6 & 7-2 & 8-1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -4 & -4 & -5 \\ -7 & 8 & -11 \\ -2 & 5 & 7 \end{matrix}$$

2.3.2 Perkalian Matriks dengan Bilangan Real (Skalar)

Definisi 2.3 (Charles G. Cullen, 1992) Jika A sebarang matriks dan k sembarang bilangan nyata, maka kelipatan skalar kA ialah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap unsur matriks A dengan *k*.

Jika

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Maka

$$kA = \begin{matrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{matrix}$$

Contoh 2.13:

Diberikan sebuah matriks

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{matrix}$$

Tentukan $3A$.

Penyelesaian :

$$3A = 3 \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{matrix}$$

$$3A = \begin{matrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 21 & 15 \\ -6 & 0 & 12 \end{matrix}$$

2.3.3 Perkalian Dua Buah Matriks

Definisi 2.4 (Charles G. Cullen, 1992) Jika A adalah matriks berukuran $m \times r$ dan B adalah matriks berukuran $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks C yang berukuran $m \times n$ yang unsur-unsurnya adalah

c_{ij} = Baris$_i$ (A) Kolom$_j$ (B)

$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Dapat juga ditulis :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = C$$

Perkalian matriks didefinisikan hanya jika banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua yaitu :

$$\begin{array}{ccccc} (A) & & (B) & = & AB \\ (m\times r) & & (r\times n) & & m\times n \end{array}$$

Contoh 2.14:

Hitunglah AB dan BA jika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 2 + 4\times(-1) + 5\times 3 & 1\times 0 + 4\times 2 + 5\times 7 \\ 2\times 2 + 1\times(-1) + (-3)\times 3 & 2\times 0 + 1\times 2 + (-3)\times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 43 \\ -6 & -19 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1+0\times 2 & 2\times 4+0\times 1 & 2\times 5+0\times(-3) \\ -1\times 1+2\times 2 & -1\times 4+2\times 1 & -1\times 5+2\times(-3) \\ 3\times 1+7\times 2 & 3\times 4+7\times 1 & 3\times 5+7\times(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & -2 & -11 \\ 17 & 19 & -6 \end{bmatrix}$$

2.4 Determinan Matriks

Definisi 2.5 (Howard. Anton, 2000) Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

Contoh 2.15:

Ada enam permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$, permutasi-permutasinya adalah :

$3! = 3\times 2\times 1 = 6$

$(1, 2, 3)$ $(2, 1, 3)$ $(3, 1, 2)$

$(1, 3, 2)$ $(2, 3, 1)$ $(3, 2, 1)$

Contoh 2.16:

Daftarkanlah semua permutasi himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, 4\}$.

Penyelesaian :

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

Maka terdapat 24 permutasi yaitu :

$(1, 2, 3, 4)$ $(2, 1, 3, 4)$ $(3, 1, 2, 4)$ $(4, 1, 2, 3)$

$(1, 2, 4, 3)$ $(2, 1, 4, 3)$ $(3, 1, 4, 2)$ $(4, 1, 3, 2)$

$(1, 3, 2, 4)$ $(2, 3, 1, 4)$ $(3, 2, 1, 4)$ $(4, 2, 1, 3)$

$(1, 3, 4, 2)$ $(2, 3, 4, 1)$ $(3, 2, 4, 1)$ $(4, 2, 3, 1)$

$(1, 4, 2, 3)$ $(2, 4, 1, 3)$ $(3, 4, 1, 2)$ $(4, 3, 1, 2)$

$(1, 4, 3, 2)$ $(2, 4, 3, 1)$ $(3, 4, 2, 1)$ $(4, 3, 2, 1)$

Inversi dalam permutasi adalah jika dalam permutasi bilangan yang lebih besar mendahului yang lebih kecil.

Contoh 2.17:

Tentukanlah banyaknya invers dalam permutasi-permutasi berikut:

1. $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$
2. $(2, 4, 1, 3)$
3. $(1, 2, 3, 4)$

Penyelesaian :

1. Banyaknya invers adalah $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$.
2. Banyaknya invers adalah $1 + 2 + 0 = 3$.
3. Tidak ada invers dalam permutasi ini.

Definisi 2.6 (Howard Anton, 2000) Sebuah permutasi dinamakan genap (*even*), jika jumlah invers seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan dinamakan ganjil(*odd*), jika jumlah invers seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.

Contoh 2.18:

Tentukanlah apakah permutasi dari $\{1, 2, 3\}$, permutasi genap atau permutasi ganjil.

Penyelesaian :

Untuk menentukan permutasi dari $\{1, 2, 3\}$ termasuk permutasi genap atau ganjil bisa dilihat dari tabel berikut :

Tabel 2.1 Permutasi

Permutasi	banyaknya Invers	klasifikasi
(1, 2, 3)	0	Genap
(1, 3, 2)	1	Ganjil
(2, 1, 3)	1	Ganjil
(2, 3, 1)	2	Genap
(3, 1, 2)	2	Genap
(3, 2, 1)	3	Ganjil

Definisi 2.7 (Anton. Rorres, 2004) Suatu hasil kali elementer (*elementary product*) dari suatu matriks A, $n \times n$ adalah hasil kali dari n entri dari A, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Contoh 2.19:

Buatlah daftar hasil kali elementer bertanda dari matriks-matriks.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan hasil kali elementer bertanda dari matriks diatas bisa dilihat dari tabel berikut :

Tabel 2.2 Hasil Kali Elementer

Hasil Kali Elementer	Permutasi yang Berkaitan	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	Genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}$

Contoh 2.20:

Buatlah daftar hasil kali elementer bertanda dari matriks-matriks.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan hasil kali elementer bertanda dari matriks diatas bisa dilihat dari tabel berikut :

Tabel 2.3 Hasil Kali Elementer

Hasil Kali Elementer	Permutasi yang Berkaitan	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi 2.8 (Ruminta , 2009) Determinan matriks adalah bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi n^2 elemen matriks bujur sangkar. Jika subskrip permutasi elemen matriks adalah genap diberi tanda positif (+) dan sebaliknya jika subskrip permutasi elemen matriks adalah ganjil maka diberi tanda negatif (−). Inversi terjadi jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam ururtan subskrip permutasi elemen matriks.

Determinan matriks hanya didefinisikan pada matriks bujur sangkar (matriks kuadrat).

Notasi determinan matriks :

$\det(A) = |A|$

Jika diketahui matriks A:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Maka determinan dari matriks A:

$$\det(A) = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Definisi 2.9 (Charles G. Cullen, 1992) Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka anak matriks (*sub-matrix*) berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapuskan baris ke- i dan kolom ke- j dinamakan minor unsur (i, j) dari matriks A dan dilambangkan dengan M_{ij} atau M_{ij} A .

Jika

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

Maka

$$M_{11} = \begin{matrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

Sedangkan

$$M_{34} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Definisi 2.10 (Charles G. Cullen, 1992) Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai :

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M_{1j})$$

dan

$$det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Berdasarkan definisi tersebut, bisa diterapkan juga pada matriks A yang berukuran 3×3, maka diperoleh:

$$\det(A) = det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}detM_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}detM_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}detM_{13}$$

$$= a_{11}det \begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix} - a_{12}det \begin{matrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix} + a_{13}det \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}\ a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\ - a_{12}\ a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2.5 Menghitung Determinan

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu :

2.5.1 Aturan Sarrus

Perhitungan determinan matriks dengan metode sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks berukuran 2×2 dan 3×3.

Metode sarrus (metode spaghetti) menggunakan perkalian elemen matriks secara diagonal. Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (dari kiri atas kekanan bawah) diberi tanda (+) sedangkan perkalian elemen matriks pada diagonal naik (dari kiri bawah kekanan atas) diberi tanda negatif ($-$).

a. Determinan matriks ukuran 2×2.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

$$\det(A) = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Contoh 2.21:

Tentukan determinan matriks 2×2 berikut menggunakan aturan sarrus.

$$A = \begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 2 \times 4 - 1 \times (-3) = 11$$

b. Determinan matriks ukuran 3×3.

Diberikan matriks A berukuran 3×3 sebagai berikut :

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Maka

$$\det(A) = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sebagai pengingat ketentuan diatas diperoleh dari :

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- - - + + +

Contoh 2.22:

Tentukan determinan matriks 3×3 berikut menggunakan aturan sarrus.

$$A = \begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = |A| = \begin{matrix} 1 & 5 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{matrix}$$

$$= \ 1 \times 0 \times 2 \ + \ 5 \times 2 \times 3 \ + \ -3 \times 1 \times -1 \ - \ 3 \times 0 \times \ -3 \ -$$

$$-1 \ \times 2 \times 1 \ - \ 2 \times 1 \times 5$$

$$= 0 + 30 + 3 - 0 - \ -2 \ - 10$$

$$= 33 - 8$$

$$= 25$$

Contoh 2.23:

Tentukan determinan matriks 3×3 berikut menggunakan aturan sarrus.

$$B = \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(B) = |B| = \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 4 & -4 \end{matrix}$$

$$= \ 0 \times -1 \times 1 \ + \ 2 \times 2 \times 4 \ + \ 1 \times 3 \times -4 \ - \ 4 \times -1 \times$$

$$1 \ — (4 \times 2 \times 0) - (1 \times 3 \times 2)$$

$$= 0 + 16 - 12 + 4 - 0 - 6$$

$$= 2$$

2.5.2 Aturan Segitiga

Jika

$$A = \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Aturan segitiga akan terbentuk dengan skema dibawah ini :

$$A = \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Hasil kali dari elemen-elemen diagonal dan hasil kali elemen dalam kedua simpul dua segitiga dari determinan pertama diberi tanda "+" dan hasil kali dari elemen-elemen diagonal dan hasil kali elemen dalam kedua simpul dua segitiga dari determinan kedua diberi tanda “ –“ . Dalam dasar aturan segitiga, diperoleh :

$$\det(A) = \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \; - \; \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$
$$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Contoh 2.24:

Tentukan determinan matriks 3×3 berikut menggunakan aturan segitiga.

$$A = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = |A| = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 -$$
$$2 \times 1 \times 2 - (3 \times 2 \times 2)$$
$$= 8 + 3 + 8 - 4 - 4 - 12$$
$$= -1$$

Contoh 2.25:

Tentukan determinan matriks 3×3 berikut menggunakan aturan segitiga.

$$B = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(B) = |B| = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{matrix}$$

$$= 1 \times 6 \times 5 + 2 \times 3 \times 5 + 1 \times 3 \times 10 - 1 \times 6 \times 5 \quad 1 \times 3 \times 10 - (2 \times 3 \times 5)$$

$$= 30 + 30 + 30 - 30 - 30 - 30$$

$$= 0$$

2.5.3 Metode Minor-Kofaktor

Definisi 2.11 (Steven J. Leon, 2001) Misalkan $A = a_{ij}$ adalah matriks $n \times n$ dan misalkan M_{ij} menyatakan matriks $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari A. Determinan dari M_{ij} disebut minor dari a_{ij}. Sedangkan kofaktor (dinotasikan dengan A_{ij}) dari a_{ij} didefinisikan dengan

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Jika diketahui suatu matriks A berukuran $n \times n$:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

1. Penentuan determinan berbasis baris matriks.

   $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} det\ M_{ij}$.

   $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$, j = indeks kolom.

atau

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

i = salah satu baris matriks.

2. Penentuan determinan berbasis kolom matriks.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ . (-1)^{i+j} \det M_{ij} \ .$$

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ . A_{ij}$, i = indeks baris.

atau

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

j = salah satu kolom matriks.

Contoh 2.26:

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor untuk matriks 3×3.

$$A = \begin{matrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

1. Menggunakan minor dan kofaktor pada baris ke- 1.

$$\det(A) = (1) \ . (-1)^{1+1} \ |M_{11}| + (5) \ . (-1)^{1+2} \ |M_{12}| + (0) \ . (-1)^{1+3} \ |M_{13}|$$

$$\det(A) = (1).(-1)^{2} \begin{matrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{matrix} + (5).(-1)^{3} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} + (0).(-1)^{4} \begin{matrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$= \ 1 \ \ 1 \ \ 0-2 \ + \ 5 \ \ -1 \ \ 0-0 \ + (0)(1)(-4-0)$$

$$= -2 + 0 + 0$$

$$= -2$$

2. Menggunakan minor dan kofaktor pada kolom ke-1.

$$\det(A) = (1). \ -1 \ ^{1+1} \ |M_{11}| + (2). \ -1 \ ^{2+1} \ |M_{21}| + (0). \ -1 \ ^{3+1} \ |M_{31}|$$

$$\det(A) = (1).(-1)^{2} \begin{matrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{matrix} + (2).(-1)^{3} \begin{matrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{matrix} + (0). \ -1 \ ^{4} \begin{matrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{matrix}$$

$$= 1(1 \cdot 0 - 2) + 2(-1 \cdot 0 - 0) + 0(1 \cdot -5 - 0)$$

$$= -2 + 0 + 0$$

$$= -2$$

Contoh 2.27:

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor untuk matriks 4×4.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian :

Menggunakan minor dan kofaktor pada baris ke-4.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\,A_{41} + 0A_{42} + 0A_{43} + (-4)A_{44}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(0(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -(0 \times (-1) \times (-22) + 2 \times 1 \times (-3) + 3 \times (-1) \times 4)$$

$$= -(0 + (-6) + (-12))$$

$$= -(-18)$$

$$= 18$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$= \ (-1)(-1)^{2+1} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{matrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{matrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$= \ -1 \ \times \ -1 \ \times 4 + 0 \times 1 \times 28 + 2 \times (-1) \times 4$

$= 4 + 0 + (-8)$

$= -4$

$\det(A) = \ 1 \ A_{41} + \ \ 0 \ A_{42} + \ \ 0 \ A_{43} + (-4)A_{44}$

$= \ 1 \ \ 18 \ + (-4)(-4)$

$= 34$

2.5.4 Reduksi Baris

Metode ini digunakan untuk menghindari perhitungan yang panjang dalam penerapan definisi determinan secara langsung. Determinan suatu matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut dalam bentuk eselon baris.

Teorema 2.1 Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$, maka det(A) adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama, yaitu det (A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$.

Bukti:

Nilai determinan merupakan perkalian dasar yang selalu memuat salah satu elemen pada setiap baris atau kolom, oleh karena itu pada matriks segitiga atas atau bawah untuk baris dan kolom yan tidak sama nilai elemennya nol, sedangkan pada baris atau kolom yang sama elemennya tidak sama dengan nol, sehingga nilai determinan dari matriks segitiga atas atau bawah hanyalah perkalian elemen pada diagonal utamanya saja.

Contoh 2.28:

Tentukan determinan untuk matriks 3×3 berikut menggunakan reduksi baris.

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad b1 \leftrightarrow b2$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(3 difaktorkan diluar determinan)}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad b3 + \; -2 \; b1$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad b3 + \; -10 \; b2$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad \text{((-55) difaktorkan diluar determinan)}$$

$$= -3.(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \times \; -55 \; \times 1$$

$$= 165$$

Contoh 2.29:

Tentukan determinan matriks 4×4 berikut menggunakan reduksi baris.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad b2 + \; -2 \; b1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad b3 + \; -1 \; b1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; b4 + (-2)\, b1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \; b4 \times \frac{1}{2}\, b3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times -1 \times 2 \times -3$$

$$= 6$$

2.5.5 Metode Kondensasi Chio

Perhitungan determinan matriks dengan metode Chio dapat diterapkan pada semua matriks bujur sangkar asalkan elemen a_{11} tidak sama dengan nol ($a_{11} \neq 0$). Metode chio menghitung determinan matriks dengan cara mendekomposisi determinan yang akan dicari menjadi sub-sub determinan derajat dua (2×2) menggunakan elemen matriks baris ke-1 dan kolom ke-1 sebagai titik tolaknya. Dekomposisi tersebut dilakukan dengan menggunakan matriks berikut:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{vmatrix}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan } j = 2, 3, \dots, n.$$

Jika A merupakan suatu matriks bujur sangkar A berukuran $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\det A = \frac{1}{{a_{11}}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{31} & a_{3i} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{i1} & a_{i3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{in} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{n1} & a_{ni} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Setiap dekomposisi determinan awal akan turun satu derajat, dekomposisi determinan dapat dihentikan sampai determinan tersebut berderajat dua.

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Contoh 2.30:

Tentukan determinan matriks 3×3 berikut menggunakan metode kondensasi chio.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \frac{1}{1^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2$$

$$= -2$$

Contoh 2.31:

Tentukan determinan matriks 4×4 berikut menggunakan metode kondensasi chio.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \frac{1}{1^{4-2}} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} -3 & -6 & -5 \\ -4 & -8 & -12 \\ 0 & -6 & -7 \end{matrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{(-3)^{3-2}} \begin{matrix} \begin{matrix} -3 & -6 \\ -4 & -8 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 & -5 \\ -4 & -12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & -6 \\ 0 & -6 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 & -5 \\ 0 & -7 \end{matrix} \end{matrix} = \frac{1}{(-3)} \begin{matrix} 0 & 16 \\ 18 & 21 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{-3} \; -288$$

$$= 96$$

2.5.6 Metode Kondensasi Dodgson

Definisi 2.12 (Lewis Carroll's, 2006) Diberikan sebuah matriks A berukuran $n \times n$ dengan $n \geq 3$. Interior dari A adalah matriks berukuran $(n-2) \times (n-2)$ yang terjadi dengan penghapusan baris pertama, baris terakhir, kolom pertama dan kolom terakhir.

Jika A merupakan suatu matriks berukuran $n \times n$:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{matrix}$$

Maka

$$\det(A) = \begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{array}$$

Algoritma dari metode kondensasi dodgson terdiri dari empat langkah yaitu:

1. Misalkan A sebuah matriks $n \times n$. Aturlah A sehingga tidak ada nol terjadi dalam interiornya dengan melakukan operasi yang tidak mengubah nilai determinannya.
2. Buat matriks B berukuran $(n-1) \times (n-1)$, terdiri dari determinan untuk setiap submatriks 2×2 dari A. secara eksplisit dapat ditulis :

   $$b_{i,j} = \begin{array}{cc} a_{i,j} & a_{i,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{array}$$
3. Menggunakan matriks $(n-1) \times (n-1)$, lakukan langkah ke-2 untuk mendapatkan sebuah matriks C berukuran $(n-2) \times (n-2)$. Bagi setiap entri pada matriks C dengan entri yang sesuai pada interior matriks A.
4. Misalkan $A = B$ dan $B = C$. Ulangi langkah ke-3 sampai diperoleh matriks 1×1, sehingga diperoleh det(A).

Contoh 2.32:

Tentukan determinan matriks 3×3 berikut menggunakan metode kondensasi dodgson.

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} = \begin{array}{cc} -6 & -5 \\ -4 & -2 \end{array} = -6 \times -2 - 5 \times -4$$

$= -8$, kemudian dibagi dengan interior dari matriks asli yaitu 4. maka diperoleh hasil:

$= \frac{-8}{4}$

$= -2$

Contoh 2.33:

Tentukan determinan matriks 4×4 berikut menggunakan metode kondensasi dodgson.

$$A = \begin{matrix} -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -8 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{matrix} -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -3 & -8 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \end{matrix}$$

Selanjutnya,

$$= \begin{matrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -5 & 8 \\ -1 & -5 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{matrix} = \begin{matrix} -16 & 2 \\ 4 & 12 \end{matrix}$$

Selanjutnya $\begin{matrix} -16 & 2 \\ 4 & 12 \end{matrix}$ dibagi dengan interior dari matriks asli yaitu $\begin{matrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$, setelah dibagi diperoleh $\begin{matrix} 8 & -2 \\ -4 & 6 \end{matrix} = |40|$, selanjutnya 40 dibagi dengan interior matriks 3×3 yaitu -5 maka diperoleh hasil akhirnya yaitu -8.

a. Sifat Determinan Matriks

Ada beberapa sifat determinan matriks yaitu :

a. $\det(A) = \det(A^T)$.

Contoh 2.34 :

Tentukan determinan dari matriks A dan transpose-nya berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 21 = -41$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 21 = -41$$

b. Jika elemen satu baris (kolom) matriks $A = 0$, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 2.35 :

Tentukan determinan dari matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

c. Jika salah satu baris (kolom) matriks A merupakan kelipatan dari baris dan kolom lain, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 2.36:

Tentukan determinan dari matriks berikut:

$$E = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad b_1 = 2b_2$$

Penyelesaian :

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 18 + 12 - 18 - 12 - 12 = 0$$

d. Jika setiap elemen dalam satu baris matriks A dikalikan dengan skalar *k*, maka det(A) = k det (A).

Contoh 2.37:

Tentukan determinan dari matriks berikut :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_2(0,25)} 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = B$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 34 + 4 - 8 - 8 - 16 = 12$$

$$\det(B) = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\ 2 + 8 + 1 - 2 - 2 - 4 = 12$$

e. Jika setiap elemen pada satu baris atau kolom matriks A dikalikan dengan konstanta kemudian ditambahkan ke baris atau kolom lain tidak akan mengubah nilai determinan.

Contoh 2.38:

Tentukan determinan dari matriks berikut:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_{31}(-3)} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ -11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = B$$

Penyelesaian:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 28 - 6 - 0 + 35 - 12 = 45$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ -11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 77 - 24 - 0 + 140 + 6 = 45$$

f. Jika salah satu baris (kolom) matriks A dipertukarkan dengan baris (kolom) lain, maka determinannya adalah $-\det(A)$.

Contoh 2.39:

Tentukan determinan dari matriks berikut :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{b_{23}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = B$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 + 1 - 2 - 2 - 4 = 3$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2 - 1 - 2 - 8 = -3$$

g. Jika A dan B adalah matriks ukuran $n \times n$, maka $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Contoh 2.40:

Tentukan determinan dari matriks berikut :

$A = \begin{matrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$, $AB = \begin{matrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{matrix}$

Penyelesaian :

det(AB) = $\begin{matrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{matrix} = 25 \times 13 - 20 \times 14 = 45$

det(A) = $\begin{matrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 6 \times 2 - 1 \times 3 = 9$

det(B) = $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 4 \times 2 - 3 \times 1 = 5$

det(A) × det(B) = det(AB)

9 × 5 = 45

h. Determinan matriks diagonal merupakan perkalian elemen dari elemen diagonal utama,

det(A) = $a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \ldots \times a_{nn}$).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan langkah sebagai berikut :

3.1 Menghitung Determinan Matriks $n \times n$ ($n \geq 5$) dengan Mereduksi Ordo menjadi $(n - 4) \times (n - 4)$.

Langkah-langkah untuk menghitung determinan menggunakan metode ini adalah sebagai berikut :

1. Diberikan suatu matriks A berukuran $n \times n$:

$$A_{nxn} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Dengan :

$a_{2j} = 0, \quad \forall\ j = 2, 3, \ldots, n-1,$

$a_{(n-1)j} = 0, \quad \forall\ j = 2, 3, \ldots, n-1,$

$a_{i2} = 0, \quad \forall\ j = 2, 3, \ldots, n-1$ dan

$a_{i(n-1)} = 0, \quad \forall\ j = 2, 3, \ldots, n-1.$

2. Gunakan rumus :

$$|A| = |C_{n\times n}| = (a_{12}a_{21}a_{n,n-1}a_{n-1,n} - a_{12}a_{2n}a_{n,n-1}a_{n-1,1} - a_{21}a_{n2}a_{1,n-1}a_{n-1,n} + a_{1,n-1}a_{2n}a_{n2}a_{n-1,1})\ C_{(n-4)\times(n-4)}\ .$$

3. Diperoleh det(A).

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut :

Gambar 3.1 *Flowchart* Determinan Matriks $n \times n$ ($n \geq 5$)

3.2 Menghitung Determinan Matriks $n \times n$ $(n \geq 3)$ dengan Mereduksi Determinan menjadi Ordo 2.

Langkah-langkah untuk menghitung determinan menggunakan metode ini adalah sebagai berikut :

1. Diberikan suatu matriks A dengan ukuran $n \times n$.

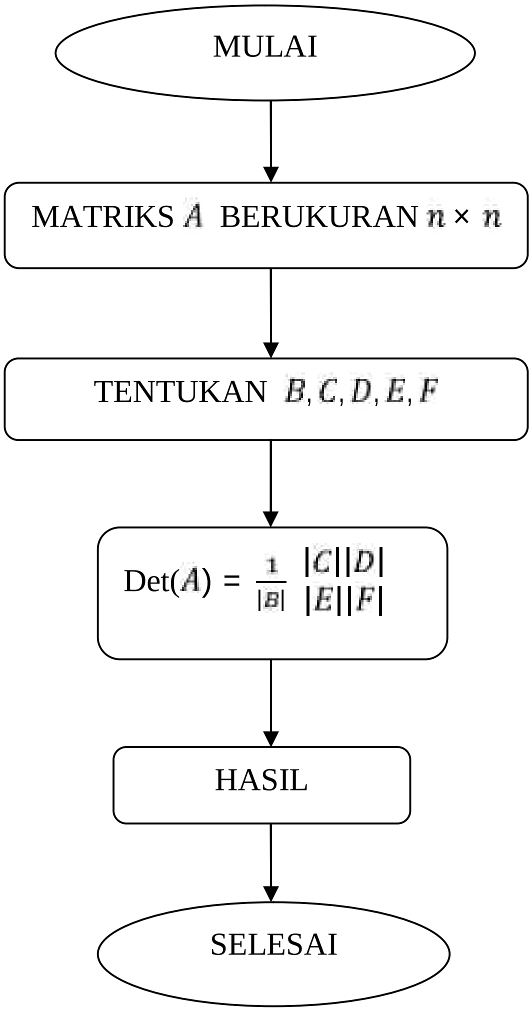
$$A_{nxn} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

2. Tentukan B, C, D, E, F, dengan syarat $|B|$ tidak nol. Matriks B adalah matriks berukuran $(n-2) \times (n-2)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom pertama serta baris terakhir kolom terakhir. Sedangkan C, D, E, F adalah matriks berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris terakhir kolom terakhir, baris terakhir kolom pertama, baris pertama kolom terakhir dan baris pertama kolom pertama.

3. Hitung det(A) dengan rumus : det(A) = $\frac{1}{|B|} \begin{matrix} |C||D| \\ |E||F| \end{matrix}$.

4. Diperoleh det(A).

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut :



Gambar 3.2 *Flowchart* Determinan Matriks $n \times n$ ($n \geq 3$)

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Berdasarkan uraian dari landasan teori pada Bab II, maka pada Bab ini penulis akan membahas tentang langkah-langkah metode baru untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n \; (n \geq 3)$.

4.1 Menghitung Determinan Matriks $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ (n ≥5) dengan Mereduksi Ordo menjadi $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{4}) \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{4})$.

Diberikan suatu matriks A berukuran $n \times n$.

$$A_{nxn} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

Disini yang akan dilakukan adalah menganalisis determinan matriks berukuran $n \times n \; (n \geq 5)$, dimana entri dari baris ke-2 dan baris $n-1$ serta kolom ke-2 dan kolom $n-1$ adalah nol, kecuali entri pertama dan terakhirnya. Dengan kata lain,

$$a_{2j} = 0, \quad \forall j = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$a_{(n-1)j} = 0, \quad \forall j = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$a_{i2} = 0, \quad \forall j = 2, 3, \ldots, n-1 \text{ dan}$$

$$a_{i(n-1)} = 0, \quad \forall j = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Determinan matriks seperti yang disebutkan diatas disebut *cornice* determinan. Sehingga matriks A dapat ditulis sebagai:

$$|C_{n\times n}| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{matrix}$$

Setiap *cornice* determinan berukuran $n \times n \; (n \geq 5)$ bisa dihitung dengan mereduksi menjadi 4, sehingga dirubah menjadi determinan berukuran $(n-4) \times (n-4)$.

Teorema 4.1 (Qefsere Gjonbalaj, Armend Salihu, 2010) Setiap *cornice* determinan $|C_{n \times n}|$ berukuran $n \times n \; (n \geq 5)$ bisa dihitung dengan mereduksi ordo pada determinan menjadi ordo 4 dengan rumus :

$$|C_{n \times n}| = (a_{12}a_{21}a_{n,n-1}a_{n-1,n} - a_{12}a_{2n}a_{n,n-1}a_{n-1,1} - a_{21}a_{n2}a_{1,n-1}a_{n-1,n} + a_{1,n-1}a_{2n}a_{n2}a_{n-1,1}) \; C_{(n-4)\times(n-4)} \quad ,$$

dimana

$$C_{(n-4)\times(n-4)} = \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

Bukti :

$$|C_{n \times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Gunakan rumus minor-kofaktor berbasis kolom ke-2, diperoleh :

$$|C_{n \times n}| = (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

+

$$(-1)^{n+2}a_{n2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Determinan di atas direduksi sepanjang kolom $n-1$, diperoleh:

$$|C_{n\times n}| = (-1)^{1+2}a_{12}(-1)^{n-1+n-2}a_{n,n-1}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+2}a_{n2}(-1)^{1+n-2}a_{1,n-1}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= ((-1)^{2n}a_{12}a_{n,n-1} + (-1)^{2n+1}a_{n2}a_{1,n-1}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Determinan di atas direduksi sepanjang baris pertama, diperoleh:

$$|C_{n\times n}| = (a_{12}a_{n,n-1} - a_{n2}a_{1,n-1}\ (-1)^{1+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots\ \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & \cdots a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n} \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{n-1,n} \end{vmatrix} +$$

$$-1)^{1+n-2}a_{2n}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Determinan di atas direduksi sepanjang baris terakhir, diperoleh:

$$|C_{n\times n}| = (a_{12}a_{n,n-1} - a_{n2}a_{1,n-1})(a_{21}(-1)^{n-3+n-3}a_{n-1,n} +$$

$$-1\ ^{n-1}a_{2n}\ -1\ ^{n-2}a_{n-1,1})$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-2} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2,3} & a_{n-2,4} & \cdots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

$= (a_{12}a_{n,n-1} - a_{n2}a_{1,n-1})(a_{21}a_{n-1,n} - a_{2n}a_{n-1,1}) \times$

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \cdots & a_{3,n-2} \\ a_{43} & a_{44} \cdots & a_{4,n-2} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ a_{n-2,3} & a_{n-2,4} \cdots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix}$$

$= (a_{12}a_{21}a_{n,n-1}a_{n-1,n} - a_{12}a_{2n}a_{n,n-1}a_{n-1,1} - a_{21}a_{n2}a_{1,n-1}a_{n-1,n} + a_{1,n-1}a_{2n}a_{n2}a_{n-1,1})\ C_{(n-4)\times(n-4)}$

Untuk lebih jelas bisa dilihat pada skema berikut :

$$|C_{n\times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & 0 & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Gambar 4.1 Skema *Cornice* Determinan

Contoh 4.1:

Diberikan matriks berukuran 5×5, tentukan determinan matriks dengan mereduksi ordo menjadi $(n - 4) \times (n - 4)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 9 - 2 \times -6 \times 3 \times 1 - 2 \times 1 \times -1 \times 9 +$

$(-1) \times (-6) \times 1 \times 1\ |2|$

$= 108 + 36 + 18 + 6\ \ 2$

$$= 168 \quad 2$$

$$= 336$$

Contoh 4.2:

Diberikan matriks berukuran 6×6, tentukan determinan matriks dengan mereduksi ordo menjadi $(n - 4) \times (n - 4)$.

$$A = \begin{matrix} 7 & 1 & -3 & 11 & 9 & -6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & -5 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 3 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 10 & 9 & -2 & 1 & 5 & 7 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{matrix} 7 & 1 & -3 & 11 & 9 & -6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & -5 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 3 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 10 & 9 & -2 & 1 & 5 & 7 \end{matrix}$$

$$= 8 \times 1 \times 5 \times 11 - 1 \times 2 \times 3 \times 5 - 8 \times 9 \times 9 \times 11 + 9 \times 2 \times$$

$$3 \times 9 \begin{matrix} 5 & -5 \\ 3 & 7 \end{matrix}$$

$$= 440 - 30 - 7128 + 468 \times 50$$

$$= -311600$$

Contoh 4.3:

Diberikan matriks berukuran 7×7, tentukan determinan matriks dengan mereduksi ordo menjadi $(n - 4) \times (n - 4)$.

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 8 & 7 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 7 & 1 & 2 & 2 & 5 & 10 & 5 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 & 7 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 7 & 1 & 2 & 2 & 5 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times 2 \times 10 \times -8 - -1 \times 3 \times 10 \times 6 - 2 \times 1 \times 3 \times -8 + 3 \times 3 \times 1 \times 6 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (160 + 180 + 48 + 54)(21)$$

$$= 442 \times 21$$

$$= 9282$$

4.2 Menghitung Determinan Matriks $n \times n\ (n \geq 3)$ dengan Mereduksi Determinan menjadi Ordo 2.

Metode baru ini didasarkan pada metode kondensasi chio dan kondensasi dodgson. Perbedaannya adalah metode kondensasi chio dan kondensasi dodgson mereduksi determinan menjadi ordo 1 dan sedangkan metode baru mereduksi determinan menjadi ordo 2. Metode baru ini diselesaikan dengan mereduksi det(A) menjadi determinan matriks 2×2, hal ini dilakukan dengan menghitung 4 determinan matriks berukuran $n - 1 \times (n - 1)$ yang diperoleh dengan menghapus baris terakhir kolom terakhir, baris terakhir kolom pertama, baris pertama kolom terakhir dan baris pertama kolom pertama dan 1 determinan matriks berukuran $n - 2 \times (n - 2)$ yang diperoleh dengan menghapus baris pertama kolom pertama serta baris terakhir kolom terakhir dengan syarat determinan matriks berukuran $n - 2 \times (n - 2)$ tidak sama dengan nol.

Metode ini memiliki keuntungan mereduksi determinan matriks menjadi matriks 2×2, sehingga lebih memudahkan perhitungan untuk ukuran matriks yang lebih besar.

Teorema 4.2 (Armend Salihu, 2012) Setiap determinan berukuran $n \times n$ $(n > 2)$ bisa direduksi menjadi determinan berukuran 2×2, dengan menghitung 4 determinan berukuran $(n-1) \times (n-1)$ dan 1 determinan berukuran $(n-2) \times (n-2)$, dengan syarat determinan berukuran $(n-2) \times (n-2)$ tidak sama dengan nol.

Berdasarkan teorema tersebut perhitungan determinan matriks berukuran $n \times n$ $(n \geq 3)$ dapat dituliskan sebagai berikut :

Diberikan matriks A berukuran $\times\ n$.

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{matrix}$$

Maka

$$|A| = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{|B|} \begin{matrix} |C||D| \\ |E||F| \end{matrix} , |B| \neq 0.$$

atau

$$|A| = \frac{1}{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{1,(n-1)} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{2,(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} \end{matrix}} \cdot$$

$$\begin{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} & a_{n-1,n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,(n-1)} & a_{n-1,n} \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{matrix} \end{matrix}$$

$|B|$ adalah determinan berukuran $(n-2)\times(n-2)$ yang merupakan interior determinan dari determinan matriks A, sementara $|C|$, $|D|$, $|E|$ dan $|F|$ adalah determinan berukuran $(n-1)\times(n-1)$ yang diperoleh dari determinan berukuran $n \times n$.

Berdasarkan rumus diatas bisa dibuktikan bahwa hasil yang sama juga bisa diperoleh untuk matriks berukuran 3×3 sesuai dengan skema diatas :

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Akan ditunjukkan $\det(A) = \dfrac{1}{|a_{22}|} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$

Bukti :

$$\det(A) = \frac{1}{|a_{22}|} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{|a_{22}|} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{21} & a_{22} \\ a_{22} & a_{23} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$= \frac{1}{a_{22}}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \times a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \times$
$a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

$= \frac{1}{a_{22}}\ a_{11}a_{22}{}^{2}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{22}a_{33} +$
$a_{12}a_{21}a_{23}a_{32} - (a_{12}a_{23}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{22}a_{31} -$
$a_{13}a_{22}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}{}^{2}a_{31})$

$= \frac{1}{a_{22}}(a_{11}a_{22}{}^{2}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{22}a_{33} +$
$\cancel{a_{12}a_{21}a_{23}a_{32}} - \cancel{a_{12}a_{23}a_{21}a_{32}} + a_{12}a_{23}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{21}a_{32} -$
$a_{13}a_{22}{}^{2}a_{31})$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$
$a_{13}a_{22}a_{31}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} -$
$a_{13}a_{22}a_{31}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(A).$$

Berdasarkan rumus diatas untuk matriks 4×4 juga bisa dibuktikan bahwa hasil yang sama juga bisa diperoleh sesuai dengan skema diatas :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Akan ditunjukkan $\det(A) = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Bukti :

$$\det(A) = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}_{A_1}$$

$$- \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}}_{A_2}$$

$$= \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \left(A_1 - A_2 \right)$$

$A_1 - A_2 = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\ (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} +$
$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} +$
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} +$
$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} -$
$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} +$

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} -$$
$$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42})$$

$$|A| = \frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \; A_1 - A_2$$

$$= \cancel{\frac{1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}} \, (\cancel{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}) \, (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} +$$
$$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} +$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} +$$
$$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} -$$
$$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} +$$
$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} -$$
$$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \det(A).$$

Berdasarkan hal ini, kita dapat peroleh hasil semua kombinasi dari $\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}$ yang tidak mengandung salah satu dari kombinasi $\varepsilon_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ dari determinan $|B|$, dan tidak mengandung salah satu elemen yang unik, sebagai hasil dari persilangan perkalian, mereka akan saling menghilangkan satu sama lain, sementara kombinasi yang lain yang memuat salah satu dari kombinasi $\varepsilon_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ dari determinan $|B|$, bisa difaktorkan dan setelah dibagi dengan determinan $|B|$ akan diperoleh hasil determinan tersebut.

Contoh 4.4:

Diberikan matriks berukuran 3×3, tentukan determinan matriks dengan mereduksi determinan menjadi ordo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det((A) = \frac{1}{|5|}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 93 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\ 1200$$

$$= 240$$

Contoh 4.5:

Diberikan matriks berukuran 4×4, tentukan determinan matriks dengan mereduksi determinan menjadi ordo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det(A) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Adapun langkah-langkah untuk menghitung determinan dari matriks diatas adalah sebagai berikut:

1. Menghitung $|B|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom pertama serta baris terakhir kolom terakhir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

2. Menghitung $|C|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris terakhir kolom terakhir.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} = \frac{1}{|1|} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -2$$

3. Menghitung $|D|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris terakhir kolom pertama.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} = \frac{1}{|2|} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\ 4$$

$$= 2$$

4. Menghitung $|E|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom terakhir.

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix} = \frac{1}{1} \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{matrix}$$

$$= -5$$

5. Menghitung $|F|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom pertama.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} = \frac{1}{3} \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3}\ 6$$

$$= 2$$

Setelah diperoleh nilai dari $|B|, |C|, |D|, |E|, |F|$ sehingga diperoleh :

$$\det(A) = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}(-4 + 10)$$

$$= 6$$

Contoh 4.6:

Diberikan matriks berukuran 5×5, tentukan determinan matriks dengan mereduksi determinan menjadi ordo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Adapun langkah-langkah untuk menghitung determinan dari matriks diatas adalah sebagai berikut:

1. Menghitung $|B|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom pertama serta baris terakhir kolom terakhir

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|2|} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(36 + 36)$$

$$= \frac{1}{2}(72)$$

$$= \frac{72}{2}$$

$$= 36$$

2. Menghitung $|C|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris terakhir kolom terakhir.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} \begin{matrix} 2 & -3 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 5 & 2 \end{matrix}$$

a. $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|1|} \begin{matrix} 2 & -3 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -4 & 2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ -21 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -84 + 105$$

$$= 21$$

b. $$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{matrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\ 10 + 6$$

$$= \frac{16}{-2}$$

$$= -8$$

c. $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{matrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -4 & 2 \\ 5 & -4 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{vmatrix} -21 & -6 \\ 7 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4}\left(378 + 42\right)$$

$$= \frac{1}{-4}\left(420\right)$$

$$= -105$$

d. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(36 + 36\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(72\right)$$

$$= 36$$

Jadi $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 21 & -8 \\ -105 & 36 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{-6}\left(756 - 840\right)$$

$$= \frac{-84}{-6}$$

$$= 14$$

3. Menghitung $|D|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris terakhir kolom pertama

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

a. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\ 10 + 6$$

$$= \frac{1}{-2}\ 16$$

$$= -8$$

b. $\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{matrix} = \frac{1}{-3} \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{matrix}$

$$= \frac{1}{-3} \begin{matrix} 1 & 19 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{-3}\ 5 - 38$$

$$= \frac{1}{-3}\ -33$$

$$= 11$$

c. $\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{matrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 2 \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{matrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\ 36 + 36$$

$$= \frac{1}{2}\ 72$$

$$= 36$$

d. $\begin{matrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{matrix} -2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{matrix} 2 & 5 \\ -6 & 8 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\ 16 + 30$$

$$= \frac{1}{2}\ 46$$

$$= 23$$

Jadi $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -8 & 11 \\ 36 & 23 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \; -184 - 396$$

$$= \frac{-580}{2}$$

$$= -290$$

4. Menghitung $|E|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom terakhir.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

a. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} -21 & -6 \\ 7 & -18 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4} \; 378 + 42$$

$$= \frac{1}{-4} \; 420$$

$$= -105$$

b. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -18 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \; 36 + 36$$

$$= \frac{1}{2} \; 72$$

$$= 36$$

c. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{-1} \begin{vmatrix} 7 & -18 \\ -1 & -10 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{-1} \left(-70 - 18 \right)$

$= \dfrac{1}{-1} \left(-88 \right)$

$= 88$

d. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} -18 & -6 \\ -10 & -15 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{5} \left(270 - 60 \right)$

$= \dfrac{1}{5} \left(210 \right)$

$= 42$

Jadi $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{-18} \begin{vmatrix} -105 & 36 \\ 88 & 42 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{-18} \left(-4410 - 3168 \right)$

$= \dfrac{-7578}{-18}$

$= 421$

5. Menghitung $|F|$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris pertama kolom pertama.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

a. $\begin{matrix}1 & -2 & -3\\ -4 & 2 & 2\\ -1 & 5 & 2\end{matrix} = \frac{1}{2}\begin{matrix}1 & -2 & -2 & -3\\ -4 & 2 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 5 & 5 & 2\end{matrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{matrix}-6 & 2\\ -18 & -6\end{matrix}$

$= \frac{1}{2}\ 36 + 36$

$= \frac{1}{2}\ 72$

$= 36$

b. $\begin{matrix}-2 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 5 & 2 & 1\end{matrix} = \frac{1}{2}\begin{matrix}-2 & -3 & -3 & 2\\ 2 & 2 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 2 & -3\\ 5 & 2 & 2 & 1\end{matrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{matrix}2 & 5\\ -6 & 8\end{matrix}$

$= \frac{1}{2}\ 16 + 30$

$= \frac{1}{2}\ 46$

$= 23$

c. $\begin{matrix}-4 & 2 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 1 & 5 & -1\end{matrix} = \frac{1}{5}\begin{matrix}-4 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 5 & 5 & 2\\ -1 & 5 & 5 & 2\\ 1 & 5 & 5 & -1\end{matrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{matrix}-18 & -6\\ -10 & -15\end{matrix}$

$= \frac{1}{5}\ 270 - 60$

$= \frac{1}{5}\ 210$

$= 42$

d. $\begin{matrix}2 & 2 & -3\\ 5 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 2\end{matrix} = \frac{1}{2}\begin{matrix}2 & 2 & 2 & -3\\ 5 & 2 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 2 & 1\\ 5 & -1 & -1 & 2\end{matrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{matrix}-6 & 8\\ -15 & 5\end{matrix}$

$= \frac{1}{2} \quad -30 + 120$

$= \frac{1}{2} \quad 90$

$= 45$

Jadi $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 36 & 23 \\ 42 & 45 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{-6} \quad 1620 - 966$

$= \frac{654}{-6}$

$= -109$

Setelah diperoleh nilai dari $|B|, |C|, |D|, |E|, |F|$ sehingga diperoleh :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 14 & -290 \\ 421 & -109 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{36} \quad -1526 + 122090$

$= \frac{1}{36} (120564)$

$= 3349$

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, diperoleh hasil penelitian bahwa determinan matriks dapat diselesaikan menggunakan metode baru dengan langkah-langkah yang dijabarkan pada metodologi penelitian. Pada bab IV dibahas dua metode baru untuk menghitung determinan matriks yaitu :

1. Menghitung determinan matriks $n \times n$ (n ≥5) dengan mereduksi ordo menjadi $n - 4 \times n - 4$. Untuk menghitung determinan menggunakan metode ini diperoleh rumus : det $C_{n \times n}$ = $(a_{12}a_{21}a_{n,n-1}a_{n-1,n} - a_{12}a_{2n}a_{n,n-1}a_{n-1,1} - a_{21}a_{n2}a_{1,n-1}a_{n-1,n} + a_{1,n-1}a_{2n}a_{n2}a_{n-1,1})$ $C_{(n-4)\times(n-4)}$. Metode ini akan membuat perhitungan lebih cepat dan lebih mudah karena matriks akan direduksi sampai $n - 4 \times (n - 4)$.
2. Menghitung determinan matriks $n \times n$ $(n \geq 3)$ dengan mereduksi determinan menjadi ordo 2**.** Untuk menghitung determinan menggunakan metode ini diperoleh rumus det(A)= $\frac{1}{|B|}$ $\begin{matrix} |C||D| \\ |E||F| \end{matrix}$, $|B| \neq 0$. Dimana B merupakan determinan matriks berukuran $n - 2 \times (n - 2)$, sedangkan C, D, E, F merupakan determinan matriks berukuran $n - 1 \times (n - 1)$ dengan syarat determinan B tidak nol. Metode ini akan membuat perhitungan lebih cepat dan lebih mudah karena matriks akan direduksi sampai ukuran 2×2.

5.2 Saran

Sudah banyak sekali metode-metode untuk menghitung determinan matriks yang dikemukakan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Bagi peneliti selanjutnya disarankan untuk membandingkan metode mana yang perhitungannya lebih cepat, lebih mudah dan cocok untuk menghitung determinan matriks.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 2000. *Aljabar Linier Elementer*. Penerbit Erlangga : Jakarta.

Cullen, Charles. G. 1992. *Aljabar Linier Dengan Penerapannya*. PT Gramedia Pustaka Utama : Jakarta.

Gjonbalaj, Qefsere dan Salihu, Armend. 2010. *Computing the Determinants by Reducing the Orders by Four, Applied Mathematics E-notes*, 10(2010), 151-158.

Hajrizaj, Dardan. 2009. *New Method to Compute the Determinant of a 3 x 3, International Jurnal of Algebra*, Vol. 3, 211-219.

Leon J. Steven. 2001. *Aljabar linier dan Aplikasinya.* Penerbit erlangga: Jakarta.

Lipschutz, Seymour dkk. 2001. *Matematika Diskrit* . Penerbit Salemba Teknika : Jakarta.

Salihu, Armend. 2012. *New Method to Calculate Determiants of* $n \times n$ *(n ≥3) Martix, by Reducing Determinants to 2nd Order*, *International Jurnal of Algebra*, Vol. 6, 913-917.

Rorres. Anton. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Penerbit Erlangga : Jakarta.

Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemograman Linier*. Rekayasa Sains: Bandung.